04-03 Théorème de Bézout

Théorème

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration de l'implication dans le cas où a et b sont positifs

Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux.

On nomme E l'ensemble des nombres strictement positifs obtenus par combinaison linéaire de a et b.
Cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient a et b.
Soit g le plus petit élément de E, c'est-à-dire le plus petit nombre strictement positif tel qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $g = au + bv$.

Division euclidienne de a par g : il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $a = gq + r$ avec $0 \leq r < g$.
En remplaçant g par $au + bv$ on écrit r comme combinaison linéaire de a et b mais $r < g$ donc $r \notin \mathrm{E}$.
On en déduit que r n'est pas strictement positif. Donc $r = 0$ et, par conséquent, g est un diviseur de a.

De même, on montre que g est un diviseur de b. Comme a et b sont premiers entre eux alors $g = 1$.

Méthode

Trouver deux entiers u et v tels que $271u + 77v = 1$.

Algorithme d'Euclide :	$271 = 77\times3 + 40$	On a	$40 = 271\times1 + 77\times(-3)$
	$77 = 40\times1 + 37$		$37 = 271\times(-1) + 77\times4$
	$40 = 37\times1 + 3$		$3 = 271\times2 + 77\times(-7)$
	$37 = 3\times12 + 1$		$1 = 271\times(-25) + 77\times88$

Théorème de Bézout généralisé

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

PGCD(a ; b) = d si et seulement si d divise a et b et s'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.

Remarque

La précision « d divise a et b » est nécessaire car il est possible d'avoir $au + bv = d$ sans avoir PGCD(a ; b) = d.
Exemple : $1 + 1 = 2$.

04-03 Applications du cours

Application 1

Pour chacun des couples (a ; b) suivants, déterminer d = PGCD(a ; b) grâce à l'algorithme d'Euclide puis un couple (u ; v) tel que $au + bv = d$.

a] (a ; b) = (1274 ; 275)

b] (a ; b) = (564 ; 235)

c] (a ; b) = (438 ; 128)

Application 2

Parmi les équations suivantes où x et y sont des entiers relatifs, lesquelles admettent des solutions ?

a] $32x + 28y = 8$

b] $46x + 51y = 1$

c] $222x - 72y = 8$

d] $7x - 32y = -5$

Application 3

1. Choisir deux entiers non nuls a et b premiers entre eux.

La fraction $\dfrac{4a+15b}{3a+11b}$ est-elle irréductible ?

2. Déterminer si le résultat précédent était inévitable.

Application 4

1. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers (u ; v) tel que $2^{10}u + 3^{10}v = 1$.

2. Déterminer l'un de ces couples à l'aide de la calculatrice ou d'un programme en Python.